UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

L'enseignement de l'Analyse

De la limite à la dérivée et aux EDO, questions épistémologiques et didactiques

Isabelle Bloch
Equipe E3D: Epistémologie et Didactique des disciplines

Plan

- I. Savoirs, principes, objets de l'Analyse – multiplicité des approches, cohérence des épistémologies
- II. La TSD revisitée dans l'enseignement secondaire/supérieur et la problématique des situations fondamentales
- III. Exemples : les EDO (équations différentielles ordinaires)
- IV. Articuler les théories

I. Principes et objets de l'Analyse

- Les savoirs préalables à l'entrée dans l'Analyse
- Les *objets* de l'Analyse
  - Suites, fonctions, limites, dérivées, intégrales, équations différentielles…
- Les *outils*
  - Définitions, symboles logiques et leur 'assemblage', SPA… et leurs *raisons d'être*
- Variables, quantificateurs, logique
  - La succession des quantificateurs et la modification essentielle de la dénotation
  - La logique 'naturelle', l'interprétation des énoncés quantifiés

Du point de vue didactique

- Identifier les objets : pertinence
- Les procédures (ne pas dissocier)
  - Modes de validation des énoncés, le Système de Preuve de l'Analyse (SPA) : dimension technique et technologique

  $\leftarrow\rightarrow$ Connaissances d'ordre II
- Théorèmes, preuves et leur champ de validité : Θ
- Dimension sémiotique et sémiolinguistique
  - Analyse des signes et de leur articulation - dimensions syntaxique et sémantique

Concepts (idéalités)	
Objets mathématiques dans une théorie	→ recherche d'une Situation Fondamentale
Dimension du formel	Règles du formalisme, logique
Dimension pragmatique : opérer avec des signes mathématiques	Techniques – savoirs
Dimension de recherche dans une situation : situation a-didactiques expérimentée	Les signes de résolution de la situation
Dimension du savoir-faire : savoirs (des élèves) sur les situations	Usage de signes (usuels ou non)
Dimension de l'expérience	Connaissances

Objets, techniques, technologies… Théories didactiques, ingénierie, études sémiotiques, travail de la logique…

- Savoirs FUGS : comment les enseigner ?
  - Les 4 dimensions de FUGS et surtout le S : où prend-il place ?
- Études des objets, des processus, des connaissances, des signes, des savoirs formels
- Questions de plasticité dans les apprentissages, de transitions
  - Cohérence des curriculums
- Situations, ingénierie : existence de SF ?
- Articulation des théories didactiques pour l'étude

Les OM de l'enseignement secondaire à l'enseignement supérieur : repérer des obstacles ?

- Les nombres réels, complétude, continuité Cf. le TD de EE13 et le texte de A.Bergé (Relime)
- OM lacunaires du secondaire et difficultés de l'organisation des OM à l'entrée dans l'Analyse
- Lien entre les notions sur IR et les définitions
- Définition des notions de limite, dérivée, tangente…
- Généralisation, unification…notion(s) de fonction, dérivée, intégrale, équations différentielles…

La notion de limite comme savoir FUG

- Notion de fonction : obstacle du non calculable
- Conceptions des étudiants, difficultés du passage intuition/définition en Analyse classique
  - Le graphique comme aide ou comme obstacle ‘visuel’
- Travaux existants : Robert & Robinet, Job & Schneider, Gantois, Bloch, Mamona-Downs, Przenioslo …
- Tall, Dubinsky, limite et dérivation…
- Rogalski, Chorlay et Alory IREM Paris 7
- La transition secondaire/supérieur, cf. EMF 2006, 2009, 2012, Ghedamsi…

La notion de limite

- Accent mis sur conception dynamique vs statique de la limite : réinterprétation ?
- Rôle essentiel de la quantification
  - cf. Durand-Guerrier : validité des énoncés, Chellougui et Barrier rôle du syntaxique/sémantique
- Quels outils de validation à disposition des étudiants ?
- Registres de représentation, nécessité d'une analyse sémiotique
- Le formalisme est-il un obstacle ? Ou plutôt une difficulté mais aussi un appui ?
- La définition comme outil de validation 'définitif'
  - TD de Lecorre

Quelles situations d'introduction de la limite ?

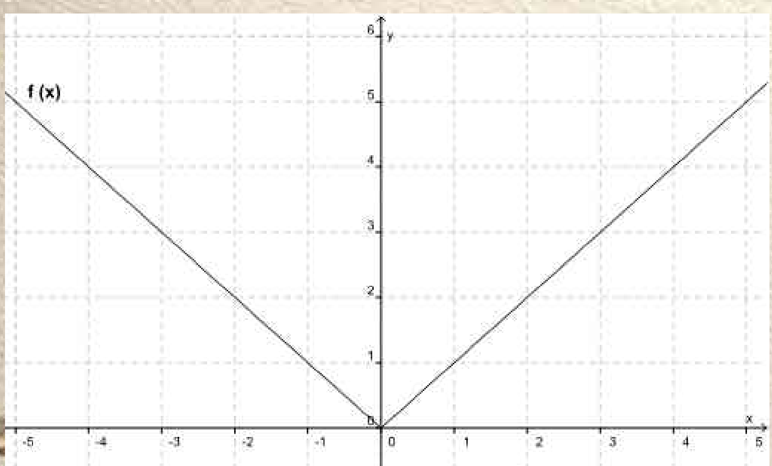
- Mettre les élèves en situation de demander une définition consistante
  - Étudier des suites ayant un comportement variable, et demander de valider une conjecture (Robinet 1983, Ghedamsi 2008, Fattoum 2014)
  - La définition formelle est le moyen de résoudre un problème « non évident » (Lecorre 2015)
  - Flocon de von Koch : procédure d'approximation validée par la définition (Bloch 2000, Bloch & Gibel 2011)
- La définition est un raisonnement « retourné » :
  - partir de l'erreur sur la fonction, et non de la variable

La limite notion première de l'Analyse

- La notion de limite est la « clé » des notions de dérivée, tangente, série entière, intégrale…
- La définition de nouvelles fonctions
- L'algèbre des limites
  - Outil mais aussi source d'obstacles
- Point de vue sémiotique et difficultés d'interprétation
  - Manipuler les nouveaux ostensifs
  - Identifier les variables, fonctions, paramètres… cf. Fonseca 2004
  - Savoir quand revenir aux définitions, approximations…

Limite et dérivée

- Lim du taux d'accroissement avec h $\neq$ 0 mais pour calculer on « prend » h = 0
- Test proposé en formation



> "when we approach to 0 by very small negative numbers, the graphic of the function approaches to 0 and when we approach to 0 by very small positive numbers it also approaches to 0. Therefore : $f\,'(0) = 0$ '' (Rasmussen JMB 2003)

Qu'est-ce qui permet de discriminer limite et dérivée ?

Les interprétations de la dérivée

- Selon Thurston (1995) :
  - infinitésimale
  - symbolique
  - logique
  - géométrique
  - microscopique
  - sous forme de taux de variation
  - approximation

Dérivée (suite)

- La notion de tangente cf. Perrin-Glorian, Vivier
  - Construction d’un milieu théorique
- Critères dans l’apprentissage de la dérivée à la transition secondaire/supérieur (Praslon 2000) :
  - Renouvellement des objets d’enseignement
  - Éventail de tâches, identification des variables…
  - Autonomie dans la résolution
  - Généralisation (**FUGS**)
  - Démonstration de résultats généraux utiles (**FUGS**)
- Le jeu local/global
  - Cf. variables macro-didactiques de la transition secondaire / supérieur : Ghedamsi

La notion d'intégrale

- Situation fondamentale de l'intégrale de Riemann (Legrand Repères IREM)
- Aire, primitive et intégrale Tran Luong Cong Khanh
- Gonzalez-Martin : intégrale impropre en L2, situations graphiques, algébriques…
  - Difficultés avec le critère de Cauchy
  - Estimations graphiques : l'intégrale converge car f a pour limite 0 en $+\infty$
- Haddad : problèmes curriculaires et de transition $\rightarrow$ cohérence épistémologique, interprétation/utilisation des symboles

Situations et cohérence des concepts

- Limite, dérivée, intégrale, nouvelles fonctions
  - quand se baser sur les théorèmes (global), quand revenir au calcul avec ε (local) et quelles techniques/technologies ?
- Les situations fondamentales : de quelle nature ? (Job et Schneider)
  - Calcul sur des grandeurs, limites comme outils
  - « calcul » de dérivées, primitives, algèbre des limites : Θ
  - SPA - même si pas toujours en langage $\forall$, $\exists$
- Outils didactiques pour analyser les signes/ les situations/le travail des étudiants/ la pertinence des institutionnalisations ?

Un exemple du problème de cohérence dans la pluralité des approches : e^x

(Winslow, CERME 8)

- Définition de $a^{1/n}$ et $a^{m/n}$ puis extension
  - « We have not explained the meaning of a symbol like $7^{\sqrt{3}}$ but we assume that a CAS will take care of this »
  - Mais : $7^{1/3}$ n'est pas « égal » à $\sqrt[3]{7}$ car $\sqrt[3]{-7}$ existe…
- Fonction inverse de $\log_e x$ lui-même construit comme $\int dt/t$
- Fonction vérifiant $f(x+y) = f(x)f(y)$; Fonction vérifiant $y' = k.y$
- Fonction définie par sa série entière
- Comment se relient ces technologies, et quel est leur niveau d'équivalence ? De quel *objet* parle-t-on ?
- Des situations pour concilier ces définitions ?

II. Evolution des théories didactiques : la TSD

- La TSD construite dans le contexte primaire
- Les théories se nourrissent des attentes institutionnelles : évolution de l’enseignement au secondaire et supérieur et du public étudiant
- La notion de situation a évolué (place de l’adidacticité, rôle du professeur), ET :
- L’analyse des situations « ordinaires » s’est développée, la structuration du milieu s’est enrichie (sémiotique, nature des raisonnements et preuves, répertoire de la classe…)

Rappel : la construction des situations

Trois champs de construction et d'analyse des situations (Bloch 2002, EE11) :

- le champ *théorique*, élaboration des situations fondamentales mathématiques $\rightarrow$ entrée épistémologique
- Le champ *expérimental a priori* $\rightarrow$ ingénierie didactique
- Le troisième niveau : celui de la *contingence*, avec alternance de phases didactiques et adidactiques observables

Le travail des didacticiens se développe dans ces trois dimensions : épistémologique (SF), expérimentale (mise en place d’une ingénierie) et analyse de la contingence

Situations adidactiques

- L'implémentation de situations adidactiques est toujours accompagnée de phases didactiques
- Les élèves interagissent avec un milieu : préciser les objets mathématiques, leur fonctionnement, leur rapport à d'autres objets, les signes, les preuves
- Allers-retours dans les niveaux de milieux et interventions du P cf. double approche
- La dévolution est un processus ; les éléments de validation sont en partie à la charge des élèves

Evolutions de la TSD

- Considérer la *séquence* d'apprentissage et les phases didactiques et adidactiques
- Les situations dans le sec/sup requièrent des séances consistantes de dévolution, des interventions du P pour 'caler' les outils théoriques puis une institutionnalisation épistémologiquement construite
- Prise en compte du répertoire antérieur et à construire : importance de l'analyse sémiotique
- Apports du P yc dans les phases heuristiques
- Validation prenant en compte le SPA

Le milieu expérimental a priori

(Margolinas 1995, Bloch 2006)

M1	***E1: élève réflexif***	***P1: Professeur projeteur***
M0 : M- d'apprentissage : institutionnalisation	**E0 : Elève**	**P0 : Professeur enseignant**
M-1 : M-de référence : formulation validation	**E-1 : E apprenant**	**P-1 : P régulateur, gère le débat, fait confronter les procédures**
M-2 : M-heuristique essais/erreurs, action	**E-2 : E-agissant**	**P-2 P-observateur, dévolueur**
M-3 : M-matériel	**E-3 : E découvrant**	

Les ‘malentendus’ sur la TSD

- Les situations
  - Situation fondamentale d’un savoir : existence ?
  - Situation ‘complètement’ adidactique
  - Rôle du professeur et désignation des objets math
- Les obstacles
  - Les obstacles épistémologiques ne doivent pas être ‘revisités’
  - Certaines formalisations ne sont pas des obstacles, même si elles sont complexes $\rightarrow$ limite
- Place de l’institutionnalisation

Les milieux envisageables

- Les milieux possibles ne permettent pas toujours l'accès à la formalisation souhaitée
  - ← → Analyse a priori
- Le professeur devra :
  - Faire intégrer la nécessité de définitions (en partie) arbitraires et de formalisations, le SPA
  - Faire travailler les réutilisations de ces formalismes
  - Montrer comment les objets mathématiques prennent consistance et quelle est leur nature et leur fonction
  - Relier les objets mathématiques entre eux → existence
- Tout ceci nécessite des allers-retours entre milieux d'action/formulation et des phases didactiques

Les mathématiques à l'université : quelle place pour les situations ?

- Des savoirs déjà très théorisés : (nombres transcendants, limites, intégrales, e.v…) et peu reliés à des connaissances anciennes (fonctions non algébriques, e.v. et géométrie)
- La recherche de situations fondamentales est rendue difficile : en analyse car non unicité de la finalisation théorique, et complexité des réseaux de savoirs
- L'enseignement sup. 'ordinaire' a peu recours aux milieux permettant l'action
  - Difficulté à s'appuyer sur l'expérience
- Le savoir final devra être formalisé : aide ou obstacle ?

Exemples de situations

- La notion de limite (Robert, 1983)
- Le flocon de Von Koch (Bloch, 2000)
- Les fonctions de deux variables (Sackur et Maurel, 2002)
- Les fonctions exp et log (Krysinska & Schneider, 2002)
- L'intégrale impropre (Gonzalez-Martin, 2006)
- Le rapport nombres réels/limites et les théorèmes fondamentaux de l'Analyse réelle (Ghedamsi, 2008)
- Intégrale/ aire/primitive : Gonzalez-Martin (2005), Haddad (2012), Trân Lu'o'ng Công KHANH (2006)
- La dérivation (Gantois et Schneider)
- Les conceptions sur la limite, et sa définition (Job, Lecorre, Hitt)
- Les conceptions des étudiants sur les équations diff. (Saglam)…

Outils de construction et d'analyse des situations

- Analyse a priori, analyse a posteriori cf. Lacasta et al.
- Structuration du milieu
- Etude du rôle du professeur
  - Apports du P yc dans les phases heuristiques $\rightarrow$ maintenir la dimension adidactique
  - Relancer la dévolution
  - Organiser et préciser la formulation
  - Validation prenant en compte les preuves pragmatiques et formelles, institutionnalisation
- Quels outils d'analyse du travail des étudiants ?

Un modèle d'analyse des milieux/signes/raisonnements

Bloch & Gibel (2011)

- Éclairer le raisonnement du point de vue
  - de ses fonctions dans la situation
  - du statut des représentations produites
- Prendre en compte les raisonnements valides (explicites, implicites) et erronés
- Elaborer un modèle multidimensionnel $\rightarrow$ visibilité des raisonnements
- Intégrer une analyse sémiotique des formulations
  $\rightarrow$ fonctions du modèle : prédictive et explicative
- Modèle ergonomique adaptable : thèmes, positions
  - Aider à la prise de décision en classe

	Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Décision de calcul - Moyen heuristique -Exemple valide ou non - Intuition sur un dessin ou calcul	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise - Généralisations
Niveaux d'utilisation des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions…)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM - Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine math.

III. Les équations différentielles

- Origine : traiter le non-linéaire en physique
  - cf. Malonga RDM 29, Pluvinage RDM 19, n°spécial Journal of Math Behavior 2003
- Les techniques spécifiques des EDO : cf. ex
- Il n'existe pas de méthode générale de résolution des EDO: et difficulté d'adaptation à chaque cas
- Les réseaux de connaissances et signes en jeu sont complexes : identifier variable, fonction, paramètres, appliquer technique…
  - Cf. Artigue et Gautheron résolution graphique 1983, Rasmussen JMB 2003, Saglam 2004

Ex 1 : ED linéaire

- $2x(x+1)y' + (2x+1)y = 1$ sur $]0, +\infty[$ (Pluvinage RDM 19)
  - x est la variable, y fonction car y'
- Résolution de l'équation homogène $y'/y =$
- Identification nécessaire de $- (2x+1)/2x(x+1)$ comme $-1/2\ u'/u$ avec $u = x(x+1)$

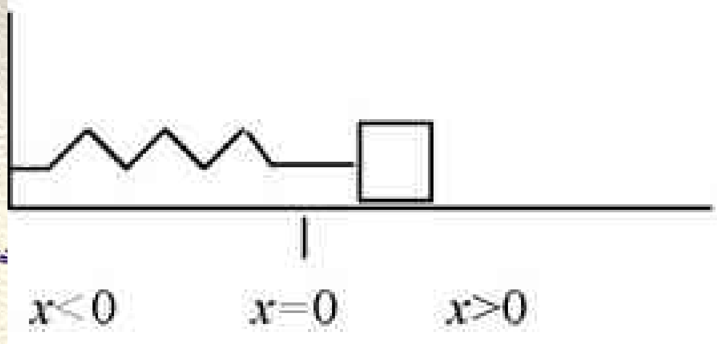
  $\rightarrow$ pas de réinvestissement direct, mais nombreuses adaptations
- Résolution de $y'/y = -1/2\ u'/u$ reconnu comme dérivée de $u^{-1/2}$
- Énoncé de $y = [2x(x+1)]^{-1/2}$

Equation avec second membre

- Voir solutions rédigées
- Connaissances antérieures requises :
  - Dérivées, primitives
  - Dérivées logarithmiques
  - Résolution d'EDO « simples » p ex $y' = ky$
  - Méthode de variation de la constante
  - Rapport aux objets : on trouve une *famille* de solutions
- Adaptation du tableau d'analyse a priori/a posteriori :

	Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM Transformation, adaptation de l'énoncé	R1.2 SYNT/SEM Reconnaissance de dérivées, attribution de primitives	R1.3 SYNT Organiser les signes pour avoir qq chose d'interprétable globalement
Niveaux d'utilisation des symboles	R2.1 SEM - Dénotation : Variable, fonction - Quelque chose de connu y'/y	R2.2 SYNT/SEM Traitement de chaque terme → signification	R2.3 SYNT Synthèse des signes → solution en termes de fonctions connues
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM Connaissances des fonctions usuelles, leurs dérivées, primitives yc ch, sh…	R3.2 SYNT/SEM Répertoire finalisé et mise en relation de dy/dx, y', u'/u Intervalles de résolution à choisir	R3.3 SYNT Théorèmes généraux, variation de la constante, chgt de variable, disjonction des cas…

Ex 2 (Rasmussen 2003)

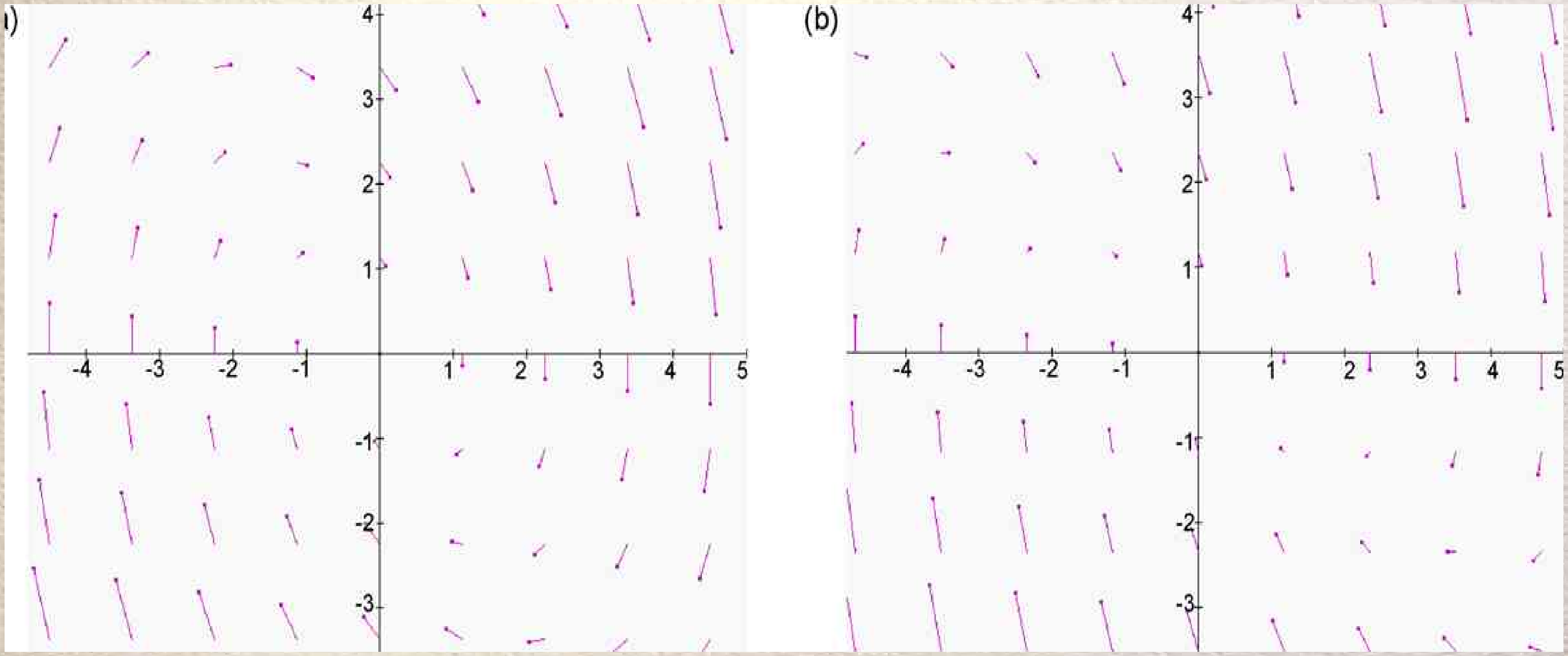


- Suite à praxéologie modélisation (situation du ressort et frottement) EDL du second ordre
- Loi de la dynamique : mγ = somme des forces
- $m\, d^2x/dt^2 + b\, dx/dt + k\, x = 0$ où x distance du corps de masse m à la position de repos, k constante du ressort, b coefficient d'amortissement en $kg.s^{-1}$
- Si m = 1 kg et k = 2 N/m alors système :

  $dx/dt = y$

  $dy/dt = -\,2x - by$ avec dx/dt vitesse et dy/dt accélération
- Deux types de solutions graphiques avec b = 1 et b = 3

Solutions graphiques

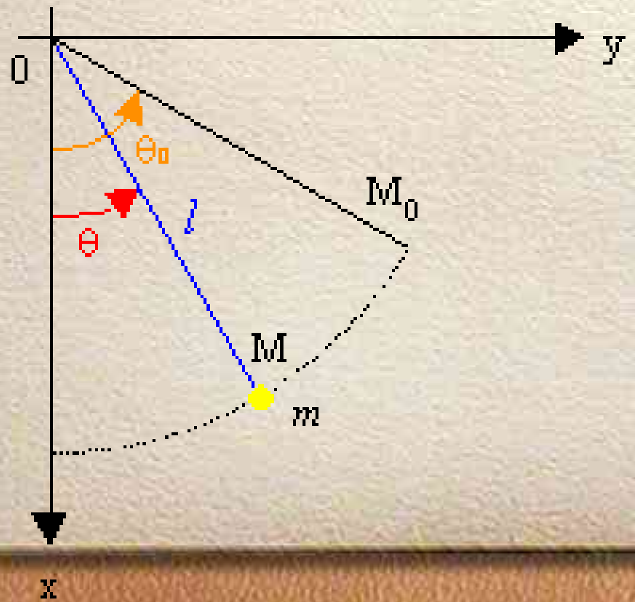


Comment « suivre » une solution

Dimension généralisatrice : mécanique

- Pendule simple cf. cours en ligne Nancy : http://uel.unisciel.fr/physique/outils_nancy/outils_nancy_ch10/co/sexercer_07.html
- θ'' + g/l sin θ = 0

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$



Dimension généralisatrice : Circuits

- Circuit Terminale STI
  - bobine inductance L = 1 H et R = 4 Ω alors

  $L\, di/dt + 4\, i = 8$ où 8 est la tension en volts
  - Solution $i(t) = E/R\,(1 - e^{-R/Lt})$
- Charge d'un condensateur $R\, dq/dt + q/c = E$
- Circuit RLC : $L\, d^2q/dt^2 + R\, dq/dt + q/C = E$
- Circuit avec échanges thermiques…

Dimensions technologique et théorique déficientes

- Accent mis dans l'enseignement sur les procédures et registre algébrique dominant cf. Saglam
- Outils de dénotation des éléments fonction, variable… non enseignés : connaissances d'ordre II
  - Pas de ' : variable, d /d : dérivée donc fonction, et ü : dérivée seconde en mécanique…
- Repérage de la nature de l'ED : linéaire ou non, ordre
- Techniques enseignées : éq. caractéristique, variation de la constante…
  - Non justification de l'existence des solutions : Cauchy-Lipschitz parfois évoqué, non démontré

IV. Articuler les théories

- Etablissement et résolution de l'EDL : idem avec circuit RLC, … dimension FUGS : généralisation de *méthodes*
  - Simplification pour les experts
- TAD : techniques, technologies, en ajoutant les objets : cf. thèse de Ayse Saglam, Vergnaud
- TSD : situations, analyse en termes de milieux, signes, répertoires, travail possible des Es et du P
- Prise en compte du syntaxique et du sémantique
- Analyse des signes : nombres, paramètres, variables, fonctions… et leur statut (argument, indice…)

Conceptions et difficultés des étudiants

- Le tableau raisonnements/signes/répertoire permet de comprendre et classer le travail des étudiants
  - Anticiper les difficultés, envisager les aides…
- Prendre en compte la définition des concepts, organiser les situations, les registres…
- Identifier les *objets mathématiques*
- Un discours ‘méta’ nécessaire sur ces *objets* :
  - connaissances d’ordre II Sackur, Drouhard et al.
- Une ‘bonne’ gestion des variables macro et micro didactiques
  - Responsabilité des Es dans le savoir et la situation

Les curriculums

- Depuis 2008, abandon au secondaire général en France de définitions utiles et du formalisme
- Accent mis sur les procédures algébriques
- La notion de limite finie de fonction n’est plus au programme
- Lien entre limite et continuité absent
- La fonction exp est définie comme $f' = f$ et $f'(0) = 1$
  - Existence admise

Les curriculums - suite

- Abandon du lien physique/maths
  - Plus d’équations différentielles au lycée, la fonction tangente a disparu, la définition des sommes de Riemann …
  - Donc aussi les calculs de volumes, masses, moments d’inertie, vitesse et distance, puissance et énergie, etc.
  - Insuffisance des connaissances des P sur grandeurs, unités
- En physique, nombreux exemples de phénomènes (qualitatif), pas de mathématisation $\rightarrow$ absence du quantitatif et du formel

$\rightarrow$ Abandon de la dimension généralisation/simplification

- Place de la modélisation dans l’enseignement ?

Conclusion

- Incomplétude des OM, absence des objets dans l'enseignement des limites/ dérivées/intégrales/EDO…
  - Quasi inexistence en mathématiques des situations réelles de modélisation $\rightarrow$ lien avec physique, économie…
- Perspectives de recherche
  - Étudier les procédures mises en place par les Es de L1 (UPPA) et leurs connaissances
  - Proposer des tâches avec interprétation des signes, changements de registres, etc.
- Organiser et diffuser des situations, des PER, dans l'enseignement secondaire/supérieur
- Poursuivre l'articulation des outils didactiques

Merci de votre attention

Bergé A. (2006) Análisis institucional a propósito de la noción de completitud del conjunto de los números reales. *Relime*, **9** (en ligne)
Bloch I. (2012) Rôle et statut des savoirs dans la pratique mathématique : l'exemple d'un basculement épistémologique dans l'enseignement de l'analyse. *Actes du colloque EMF 2012*, Université de Genève.
Bloch I., Ghedamsi I. (2009) From numbers to limits: situations as a way to a process of abstraction, *CERME 6* , Lyon.
Bloch I., Chiocca CM., Job P., Schneider M. (2007) Du numérique aux limites : quelle forme prend la transition secondaire/supérieur dans le champ des nombres et de l'analyse ? *Actes de la 13ème Ecole d'Eté*, Cédérom, IUFM d'Aquitaine.
Bosch, M., Fonseca, C. y Gascon, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares, *RDM*, **24** (2-3), 205-250.
Durand-Guerrier V. (2006) Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques à la lumière de la théorie des modèles de Tarski. *Actes du séminaire Didactiques : quelles références épistémologiques?* Aquitaine.
Fonseca C. (2004) Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria. *Tesis*, Universidad de Vigo.
Ghedamsi I., Chellougui F. (2012) Antiphérèse de √2 : introduction d'une dimension a-didactique dans l'enseignement de l'analyse à l'Université. *Actes du colloque EMF 2012*, Genève.
Vivier L. (2010) Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **15**,173-199.