Anneau des nombres décimaux

Envoyé par Mic http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?3,318936,page=1
L'anneau des nombres décimaux, c'est un sous-anneau de Q.
Je sais que tout sous-anneau de Q est principal mais je ne sais plus le démontrer (je crois que faut considérer un truc du genre I inter Z...). Pouvez-vous maider à le démontrer ?
Ensuite, comment définit-on le PGCD de nombres décimaux ?
Merci

Guimauve
« Je sais que tout sous-anneau de Q est principal »

L'anneau des nombres décimaux est justement un contre-exemple, non ?

Toto.le.zero
l'anneau des décimaux est principal. En esperant ne pas avoir dit trop de conneries.

fred
La suite des $\frac{\mathbb{Z}}{10^n}$ doit fournir une suite croissante d'idéaux non stationnaire, l'anneau des décimaux n'est donc pas notherien et a fortiori pas principal. Non ? A plus

Mic
Ah moi j'ai lu plusieurs fois qu'il est principal....

Domi
$\mathbb{D}$ est bien sûr principal . Soit I un idéal non nul de $\mathbb{D}$ et $x \in I^*$. Pour m entier assez grand

$10^m x \in \mathbb{Z}^*$ donc I contient des entiers strictement positifs . Si on note n le plus petit :

$\forall x \in I$: x peut s'écrire $x = 10^m y$ avec $y \in \mathbb{Z}$.

On effectue la division euclidienne de y par n : $y = kn + q$ avec q entier et $0 \leq q < n$. Alors

$x = 10^m kn + 10^m q$ donc $q \in I$ et $q = 0$ et I est engendré par n .

Mic
Merci Domi !

Trivecteur
Guimauve : *Je sais que tout sous-anneau de Q est principal*
Soit A un sous-anneau de l'anneau $\mathbb{Q}$ des rationnels.

(1) : si $r = a/b \in A$ où a et b sont des entiers premiers entre eux alors $1/b \in A$ (utiliser Bézout).

Maintenant soit I un idéal non nonl de A. Comme $\mathbb{Z}$ est principal,
(2) : il existe $g \in \mathbb{Z}$ tel que $I \cap Z = g\mathbb{Z}$.

D'autre part, comme dans (1), soit $r = a/b$ dans I. Alors par (2), pour un certain entier x, on a

$r = g(x/b)$ et par (1), on sait que $x/b \in A$. Ceci prouve que I est principal (engendré par g).

OlivierG
Bonjour,
Pour Fred : $\frac{\mathbb{Z}}{10^n}$ n'est pas un idéal de $\mathbb{D}$, sinon $\frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10^n}$ serait un élément de $\frac{\mathbb{Z}}{10^n}$, ce qui n'est pas le cas. Amicalement.

Mic
Et personne ne sait comment on définit le PGCD de 2 nombres décimaux ?

Trivecteur
Le pgcd de deux éléments a et b d'un anneau intègre A, est, s'il existe, un élément d de A qui est à la fois :
(1) : diviseur commun à a et à b
(2) : multiple de tout diviseur commun à a et à b.
Dans un anneau principal, un pgcd existe toujours. Il ne te reste plus qu'à mettre en pratique, par exemple quel est le pgcd de $a = 0,6$ et $b = 34,8$?

Mic
PGCD(a,b) = 0,2 ?

bs
bonjour
question: soit A un anneau principal; peut-on alors affirmer que tout sous-anneau de A est aussi principal ? (par exemple: Z et D)
je n'ai pas trouvé dans mes cours un tel théorème et n'arrive pas à exhiber de contre-exemple.
Merci.
Mic: essaie 0,6 avec les éléments fournis par Trivecteur ?

Toto.le.zero
R[X] est principal, mais le sous anneau Z[X] ne l'est pas.
En esperant ne pas avoir dit trop de conneries.

Mic
ah oui lol, j'ai pris le plus petit :p donc c'est 0,6.
Un autre exemple intéressant : PGCD(21,1.4)=1.

Le barbu rasé
Plus simplement, bs :
Un corps est toujours "touskonveu" (euclidien, principal, factoriel, noethérien, de bezout, ...), or tout anneau commutatif intègre se plonge dans son corps des fractions.
Etant donné une propriété remarquable d'un anneau commutatif intègre, il y a donc peu de chances qu'elle soit stable par sous-anneau (sauf si tous les anneaux commutatifs intègres vérifient cette propriété, ou qu'un corps ne la vérifie pas, évidemment).

Mic
euh Z[X] est principal, non ?

bs
merci Toto de me rappeler un résultat qui s'était évaporé, certainement avec la chaleur;

effectivement, on le démontre en considérant l'ensemble I de Z[X] formé des polynômes dont le terme constant est pair.

bs
merci pour toutes ces précisions et les explications de barbu rasé.

OlivierG
Pour Mic : $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas un anneau principal, car l'idéal $(2,X)$ n'est pas principal.

Mic
je narrive pas à voir pourquoi (2,X) n'est pas principal. FAut passer par la norme ?

oumpapah
pour Mic etOlivierg
Z[X] n'est pas principal de façon tres simple: l'idéal engendré par X est premier et non maximal: en effet le quotient de Z[X] par (X) est isomorphe à Z qui est integre et non un corps.

Mic
Ahoui ! dans un anneau principal, tout idéal premier est maximal !! héhéééé

Mic
OLivierG > tu peux quand meme me dire pourquoi (2,X) n'est pas principal ?

corentin
Il contient X, il contient 2. Donc il contient $2\mathbb{Z}[X]$ et $X\mathbb{Z}[X]$. Suppose qu'il s'écrive $P\mathbb{Z}[X]$. Que dire de deg(P)?

Gakusei
Bonsoir,

Je pense que pgcd(21,1.4)=7 et pgcd(0.6,34.8)=3, en fait je fais plus que le penser, j'en suis persuadé: N'oublions pas que dans $\mathbb{D}$ 2 et 5 sont des unités! @+

niktalop
bonjour peut etre que tu préfèreras cette réponse.
Z[X]/(X,2) est isomorphe a Z/2Z ; si Z[X] etait principal alors tu pourrais trouver P appartenant à Z[X] tel que Z[X]/(P) soit isomorphe à Z/2Z
tu n'as qu'à essayer de trouver ce P qui n'existe pas par ailleurs. Je te laisse conclure.

Mic
pgcd(21,1.4)=7 : OK
pgcd(0.6,34.8)=6 plutôt.
corentin > je vois pas, pour moi P=X+2 marche :(je suis perdu.

corentin
Tu crois que tout polynome de $2\mathbb{Z}[X]$ peut s'exprimer sous la forme $(X+2)P$?

Mic
ah oui donc P est de degré 0.