Cours 2
Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction

Alain Kuzniak*, Fabrice Vandebrouck*, Laurent Vivier*
Elizabeth Montoya**

*Laboratoire de Didactique André Revuz
Université Paris Diderot
**Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Projet ECOS C13H03

Motivations pour une étude de l'enseignement de l'analyse

- Un enseignement tardif qui peine à se différencier des autres domaines mathématiques enseignés et à émerger comme domaine à part entière
- Premières rencontres problématiques et partielles avec des objets complexes comme les fonctions, les nombres réels, les suites...
- Identifier ce travail mathématique mis en oeuvre au lycée et au début de l'université en précisant ses caractéristiques en relation avec une construction assumée de ce travail

Identifier le travail mathématique en analyse et penser son développement

Nature du travail en analyse

- Quelle forme revêt finalement le travail mathématique en analyse à la fin du secondaire et au début de l'enseignement supérieur ?
- Comment se négocient les transitions entre des formes de travail a priori bien différentes ?
- Comment penser et favoriser le développement d'un travail riche en analyse ?

Identifier le travail mathématique en analyse et penser son développement

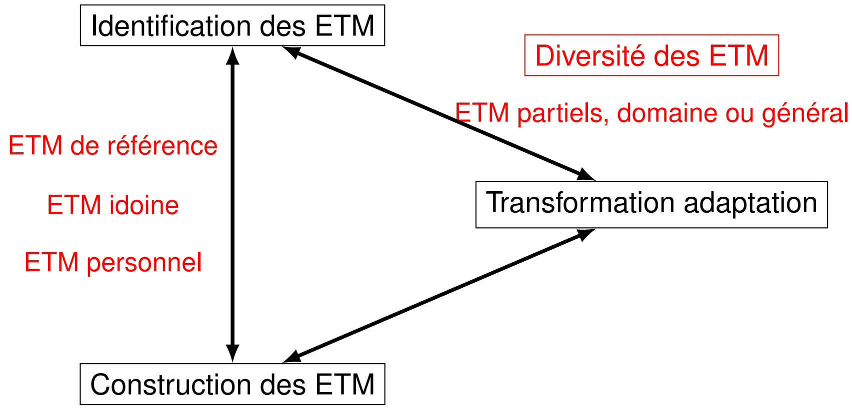
Des recherches en cours

- Le projet ECOS-Conicyt avec le LDAR-P7 et l'IMA-PUCV
- Les travaux de Vandebrouck et de Vivier (HDR)
- Des thèses en cours (C. Derouet, R. Menares, S. Rousse, P. Verdugo)

Un appui sur le modèle des ETM

Un modèle (les ETM) dont l'ambition est justement de mieux comprendre le travail mathématique pour éventuellement adapter et enrichir sa mise en oeuvre dans l'enseignement.

Identification et construction des ETM de l'analyse



Une identification des ETM de l'analyse : un problème complexe

- La diversité et la complexité des objets en jeu dans l'analyse
  - Les nombres réels, les limites
  - Les fonctions ; les suites
  - Dérivées et intégrales
- Des enjeux cruciaux liés à :
  - Infini
  - Continu / discret
  - Global / local
  - Approximation
- Confusion entre algèbre et analyse. La question des changements de domaines mathématiques et le lien avec d'autres domaines comme les probabilités
- Une rencontre avec des ETM partiels associés à des sous-domaines : $\mathrm{ETM}_{fonctions}$, ETM_{suites} etc.

Les Espaces de Travail Mathématique en quelques diapos

Développer un cadre méthodologique et théorique pour les recherches en didactiques

1. Non ciblé sur un niveau de scolarité particulier et permettant d'étudier l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques :
   Durant la scolarité obligatoire (et supérieure)
   Durant la formation des enseignants
2. Permettant de comparer sans nécessairement classer l'enseignement dans différentes institutions et pays.
3. Le 'travail mathématique' : un point central et crucial

Le travail mathématique : un enjeu crucial et une activité particulière

Freudenthal's view

What is mathematics ? Of course you know that mathematics is an activity because you are active mathematicians. It is an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing a subject matter. ESM 3 - 1971

Le travail mathématique : un enjeu crucial et une activité particulière

La conception de Thurston

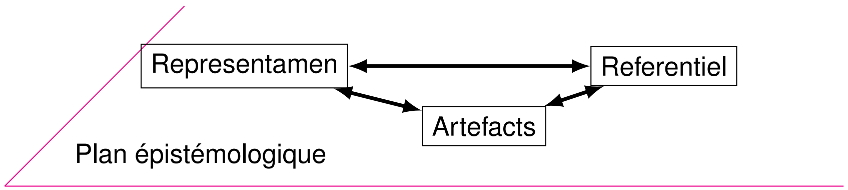
Se pourrait-il que la difficulté à donner une bonne définition directe des mathématiques soit fondamentale en indiquant que les mathématiques ont par essence une qualité récursive ? Nous pourrions ainsi dire que les mathématiques sont le plus petit domaine satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Les mathématiques incluent les nombres entiers et la géométrie du plan et des solides
2. Les mathématiques sont ce que les mathématiciens étudient
3. Les mathématiciens sont ces êtres humains qui font avancer la compréhension humaine des mathématiques.

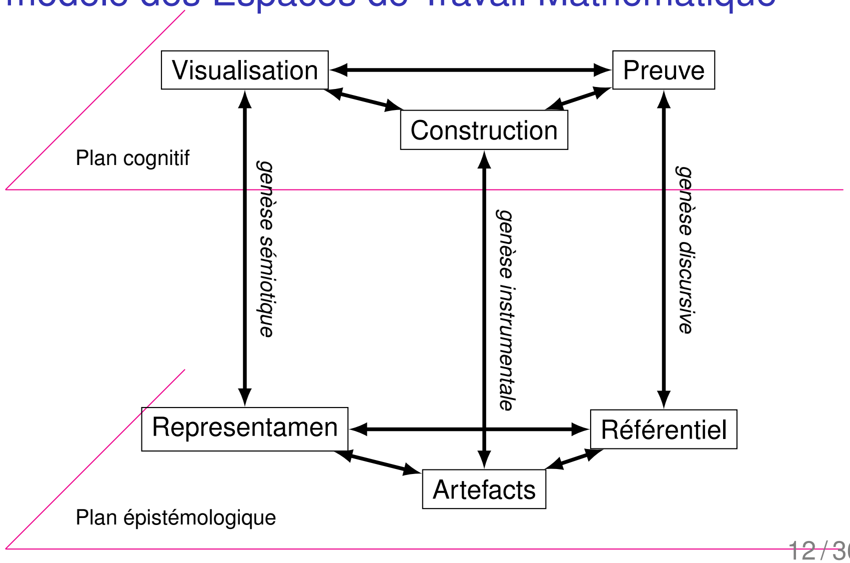
Le modèle des Espaces de Travail Mathématique

Le plan épistémologique

- Un ensemble d'objets tangibles – signes, représentations –
- Un ensemble d'artefacts – outils de dessins, de calcul, logiciels, routines –
- Un ensemble de règles et de propriétés constitué en un référentiel



Le modèle des Espaces de Travail Mathématique



Articuler les deux plans épistémologique et cognitif

Différentes genèses

- Une genèse sémiotique basée sur les représentations sémiotique qui confère aux signes (representamen) de l'ETM un statut opérationnel en mathématiques
- Une genèse instrumentale qui permet de rendre opérationnel les artefacts pour la construction.
- Une genèse discursive de la preuve qui donne un sens aux propriétés pour les mettre au service du raisonnement mathématique.

L'étude des Espaces de Travail Mathématique

- Un modèle dynamique avec une description des différentes articulations entre les plans du modèle.
- La circulation à l'intérieur des ETM en relation avec l'activité de sujets particuliers sur des situations, un lien naturel avec les théories de l'activité :
  1. Les entrées dans le travail
  2. Les éventuels bloquages et ruptures dans certaines genèses
  3. Rôle du professeur dans les circulations
- Qu'est ce qui pilote le travail ? Notion de paradigmes.
- Reconstruction du niveau général du travail mathématique : ETM partiels et ETM d'un domaine
- La topographie des ETM avec le relief sur certains éléments de l'ETM

Affiner l'étude des ETM de l'analyse

- Les paradigmes de l'analyse
- Particularités du travail en analyse et jeu entre genèses
  - Perspectives de localité
  - Dialectique discret continu
- Une identification des ETM de l'analyse autour des fonctions
- Lycée et université : deux ETM idoines en rupture

Les TD

Chaque TD permettra d'aborder des points particuliers de l'ETM de l'analyse :

- Les composantes de l'ETM
- Les paradigmes de l'analyse
- La circulation du travail

Objets de l'analyse pris en compte : les fonctions exponentielles, les fonctions de densité et la tangente.
Les corpus travaillés : extraits de manuels, productions écrites, extraits de vidéo et transcriptions.

1. Introduction de l'exponentielle avec la dialectique discret-continu (Lycée)
2. Ajustement d'une courbe en liaison avec les fonctions de densité avec la circulation entre genèses (TS)
3. La tangente avec les paradigmes et les perspectives de localité (Université)

Qu'est-ce qui guide le travail ? À la recherche des paradigmes de l'analyse

La notion de paradigme

Deux paradigmes fondamentaux et conflictuels

ANS Analyse non standard

AS Analyse standard

Les trois paradigmes de l'Analyse Standard

Analyse Arithmetico-géométrique (AG) qui permet des interprétations provenant, avec quelques implicites, de la géométrie, du calcul arithmétique mais aussi du monde réel.

Analyse calculatoire (AC) Dans ce calcul algébrique généralisé, les régles de calcul sont définies, plus ou moins explicitement, et elles sont appliquées indépendamment d'une réflexion sur l'existence et la nature des objets introduits.

Analyse Infinitésimale (AI) Elle est caractérisée par un travail spécifique formel sur l'approximation et la localité : bornes, inégalités, travail sur des voisinages, négligeabilité...

Une intrication des paradigmes problématique

Nombre dérivé en classe de première

Paradigme AG Pente d'une droite tangente au graphe d'une fonction, si ce graphe admet une tangente.

Paradigme AI Rapport de la variation infinitésimale de la valeur d'une fonction sur un changement infinitésimal de la variable

Paradigme AC Résultat d'un calcul symbolique sur des expressions algébriques

Un Macro-signe qui sert d'emblème unificateur car peu compréhensible à ce niveau d'enseignement (cérémonie initiatique)

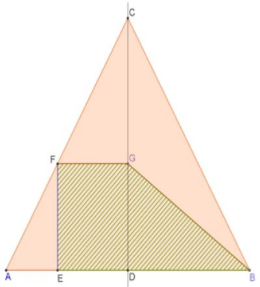
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Particularités du travail mathématique et jeu entre genèses

- Les perspectives de localité
- La dialectique discret-continu

Les perspectives de localité

La configuration étudiée Montoya et Vivier (Sessa)

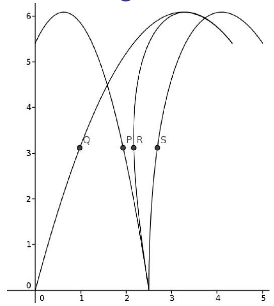


Aire du trapèze *FGBE*

ABC un triangle équilatéral
D le milieu de $[AB]$ et *G* un point libre de $[CD]$

Exploration dans le plan $[Sem - Ins]$

La configuration étudiée



Cotés du trapèze

$x = FG \quad p(x)$
$y = FE \quad q(y)$

Diagonale du trapèze

$z = GE \quad r(z)$

Variable non liée au trapèze

$t = GA \quad s(t)$

Une exploration qui s'appuie sur le plan $[Sem - Ins]$ avec un travail sur les genèses sémiotiques et instrumentales appuyées sur différentes perspectives de localité et des déconstructions ponctuelle et locale. Le tout en relation avec une validation discursive en changeant de paradigmes

Dialectique Discret-Continu et déconstructions

Etudes de suites avec un tableur (Durand-Guerrier et Vivier)

Question 8

Pour étudier deux suites (u_n) et (v_n), on a entré dans un tableur :

- les nombres 3, dans la cellule A2, et 2, dans la cellule B2
- et les formules suivantes :

A3 : = 0.5*(A1+5/A1)   B3 : = 2+1/(2+B1)

Les formules rentrées en A3 et B3 ont été recopiées *vers le bas* jusque la ligne 21. On obtient un tableau de valeurs comme indiqué dans l'extrait de tableur ci-contre.

	A	B
1	u_n	v_n
2	3,000000000000	2,000000000000
3	2,333333333333	2,250000000000
4	2,238095238095	2,235294117647
5	2,236068895643	2,236111111111
6	2,236067977500	2,236065573770
7	2,236067977500	2,236068111455
8	2,236067977500	2,236067970035
9	2,236067977500	2,236067977916
10	2,236067977500	2,236067977477
11	2,236067977500	2,236067977501
12	2,236067977500	2,236067977500
13	2,236067977500	2,236067977500
14	2,236067977500	2,236067977500

Peut-on déduire de ces données que les suites (un) et (vn) convergent vers la même limite ? Justifiez précisément.

Une exploration qui s'appuie sur la dimension instrumentale dans le plan $[Sem - Ins]$ dans le paradigme AG.
Nécessité d'une reconstruction du continu à partir du discret.
La question d'une validation discursive en changeant de paradigmes

Une identification des ETM idoines de l'analyse à partir des formes de travail sur les fonctions

- Une forme de travail F1, d'entrée dans la *pensée fonctionnelle*
- Une forme de travail F2 très algébrisée
- Une forme F3 intégrée dans l'analyse classique

L'entrée dans la *pensée fonctionnelle* F1

- Un appui sur la modélisation extra ou intra mathématique mettant en relation plusieurs domaines mathématiques
- Développement de la perspective de localité globale sur les fonctions, associées aux propriétés globales : parité, périodicité, surtout croissance, variations, extremums globaux...
- Plusieurs registres de représentation, notamment l'importance du graphique
- Nombreux artefacts technologiques
- Une certaine evanescence du référentiel théorique. Présence implicite du TVI dans des routines.

Une forme de travail F2 très algébrisée, fin du lycée

- Les fonctions comme objets mathématiques associés principalement à des formules algébriques d'où un certain amalgame entre la "Fonction" et la "Formule" et une réduction au calcul algébrique
- Calculatrice graphique pour tracer des graphes de fonctions données
- Perte de la perspective de localité globale : aspect réducteur de la représentation algébrique par rapport aux potentialités de la représentation graphique

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{e^{-x}-1} - 1 - \frac{x}{2} \quad g(x) = x^2 + \sqrt{x} + e^x$$

Une forme de travail F2 très algébrisée, fin du lycée

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{e^{-x}-1} - 1 - \frac{x}{2} \quad g(x) = x^2 + \sqrt{x} + e^x$$

- Pour voir que g est croissante, les élèves vont calculer la dérivée
- Travail des propriétés globales de variation via la perspective de localité ponctuelle essentiellement

  f est croissante sur $\mathbf{R}$ équivaut à $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) \geq 0$
- Un travail s'appuyant sur un référentiel de règles algébriques.

Forme de travail F3 intégrée dans l'analyse, début de l'université

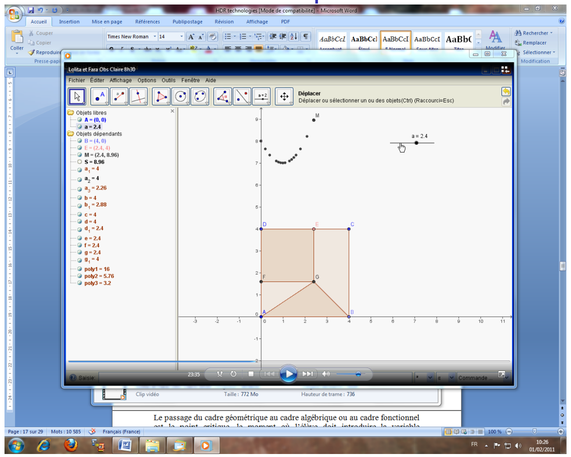
- Travail spécifique sur la perspective de localité locale visant l'entrée dans l'analyse classique
  - Travail préliminaire sur les nombres réels (limites, complétude de R...)
  - Comparaison locale des fonctions (équivalence, négligeabilité)
- Développement du travail de déconstruction dans la perspective de localité
  - Formules de Taylor (globales) / Développements limités (locaux)
  - Calcul de limites avec adoption de perspective locale

Quand x tend vers $+\infty$, quelle est la limite de

$$x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln(x)}$$

ETM idoine du début du lycée : un ETM amalgamé

Une tâche emblématique en classe de seconde



Deux formes de travail juxtaposées correspondantes aux deux paradigmes AG et AC

- Première phase d'activité dans le plan [Sem-Ins] avec une construction géométrique sur un logiciel de géométrie, l'appui sur la trace d'un point mobile, la conjecture numérique et graphique d'un minimum (forme F1).
- Deuxième phase d'activité dans le plan [Sem-Dis], preuve basée sur des représentations algébriques (mise en place de F2)
- Pas de continuité entre les deux phases, malentendu des élèves qui n'identifient pas les motivations différentes (motifs et buts) des deux phases d'activité
- Nécessité au lycée d'emboiter le travail dans F2 en continuité avec le travail dans F1 qui correspond à une meilleure articulation entre paradigmes

Reconstruction d'un ETM idoine articulant les paradigmes AG et AC : Lagrange et Minh

- Développer l'activité dans le domaine géométrique (AG) avec une argumentation sur la la construction, les points fixes.(consolider [Ins-Dis]) avec un logiciel de géométrie.
- Assumer le questionnement et la discusssion pour favoriser la modélisation de la situation géométrique et un passage aux fonctions dans AC comme covariation entre variables dépendantes [Ins-Dis], en utilisant les mesures fournies par le logiciel.
- Argumenter sur les propriétés de la fonction elle-même à partir du graphique : Développer l'approche "coordonnée" [Sem(Graph+Alg)-Dis], lien avec la visualisation "heuristique".
- Référence au logiciel Casyopée avec une interface spécifique intermédiaire entre géométrie et algèbre.

Lycée et université : deux ETM idoines en rupture

Fin du lycée

Malgré des situations introductives dans le plan [Sem-Ins], paradigme AG, le travail est relativement homogène dans le paradigme AC.
Peu de travail de mise en relation sur les genèses sémiotique et instrumentale à travers les perspectives de localité avec une perte de la diversité sémiotique et instrumentale.
Un monde de routines.

À l'université

À l'université, c'est plutôt le plan [Sem-Dis] qui est activé avec l'introduction de AI.
Plus de calculatrice graphique et nécessité d'adopter les perspectives de localité ponctuelles, globales ou locales sur les représentations algébriques pour ensuite les transférer aux représentations symboliques formelles.

Conséquences sur les ETM personnels d'étudiants à l'entrée à l'université

Un ETM piloté par le paradigme AC

Une approche algébrique des fonctions chez beaucoup d'étudiants entrant à l'université qui permet tout de même d'envisager un certain travail symbolique et formel
Forte réussite aux tests sur les limites de suites ou fonctions quand des règles algébriques s'appliquent

Un travail algébrique sans flexibilité

Peu de possibilités pour adopter des perspectives de localité ponctuelle, globale ou locale à partir des représentations algébriques notamment quand les règles ne s'appliquent pas.
Certains étudiants semblent cependant avoir développé une approche "coordonnée" des fonctions, dans les registres algébrique et graphique.

Pour conclure

Identifier le travail mathématique et décrire les ETM

- Paradigmes qui guident le travail
- Etude de la circulation du travail par la mise en oeuvre des différentes genèses pour un travail mathématique complet
- Perspectives de localité et la dialectique discret-continu en relation avec des constructions/déconstructions précisant les différentes génèses

Parallèles avec la géométrie

- Dialectique AG-AC au lycée et GI-GII au collège
- Les constructions/deconstructions ponctuelle, globale, locale et 1D, 2D, 3D

Les ETM idoines existant dans le secondaire et dans le supérieur

- Des ETM très compartimentés sans connection explicite
- Un pilotage par des paradigmes différents : AG puis AC au lycée ; AI à l'université
- Dynamique du travail relativement faible par la non mise en relation des différentes genèses.
- Conséquence au lycée : un enfermement dans le plan [Sem-Ins] soit par un travail sur les logiciels, soit par un travail sur les techniques algébriques routinisées.

Des constats pour avancer vers un ETM plus riche

- Le travail de l'élève comme technicien (voire tâcheron) au lycée mais adapté aux examens.
- Un travail visé avec plus de profondeur mathématique (nature et existence des notions) à l'université mais il manque une maîtrise des techniques
- Des constats qui permettent de transformer le travail en jouant de manière consciente :
  - Les différents paradigmes
  - Un travail plus complexe et varié sur les génèses
  - Un travail plus important notamment sur les perspectives de localité
  - Les diverses dialectiques
- Beaucoup reste à faire ...