

Document de travail pour l'atelier sur la limite – EEDM 18 – Brest 2015

(Thomas Lecorre)

Script de l'expérimentation en TS du 18.12.14 de 14h10 à 17h10 (Cinquième séance de la situation)

Soit f est une fonction définie sur \mathbb{R} , on dit que f vérifie la propriété P1 si
« pour tout $x > 50$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$ »

Question : Si une fonction f vérifie P1, que peut-on dire de f ?

Trois conjectures sont proposées pour commencer

[>Loïc]: (C1.1) $f(x)$ est bornée. [24:29]

[>Caroline]: [24:59] (C1.2) si f a une limite alors la limite est comprise entre deux moins epsilon et deux plus epsilon. [25:09]. [25:14]

[>Maxime]: (C1.3) si P1 alors $f(x)$ est bornée par deux moins epsilon et deux plus epsilon sur l'intervalle sur l'intervalle cinquante plus l'infini. Cinquante exclus.

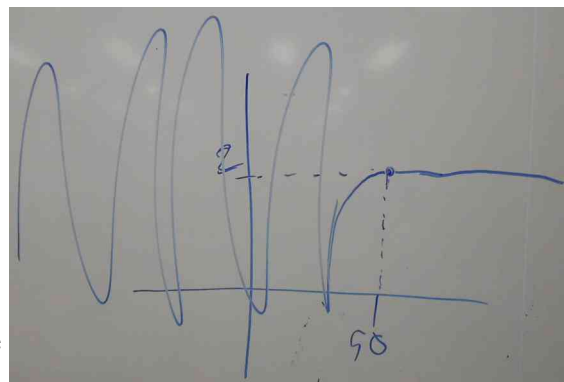
Les conjectures C1.1 et C1.3 sont étudiées et résolues.

Puis le professeur demande des exemples de P1, ce qui donne lieu à 3 nouvelles conjectures :

C1.4 : « $f(x) = 2$ vérifie P1 »

C1.5 : « $f(x) = 2 + 1/x$ vérifie P1 »

C1.6 : « f défini par le dessin ci-contre vérifie P1 »



Ces trois conjectures sont résolues, puis le professeur propose une nouvelle conjecture.

PARTIE I : Le faux-contre-exemple

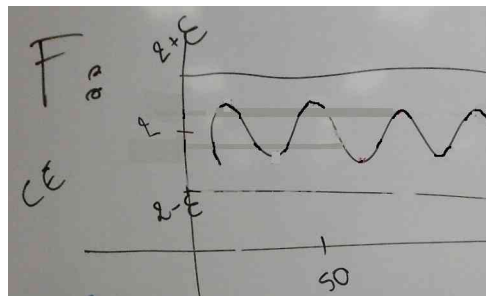
Étude de C1.7 : « si f vérifie P1 alors $f(x) = 2$ pour $x > 50$ »

Un temps de réflexion est donné puis un vote effectué :

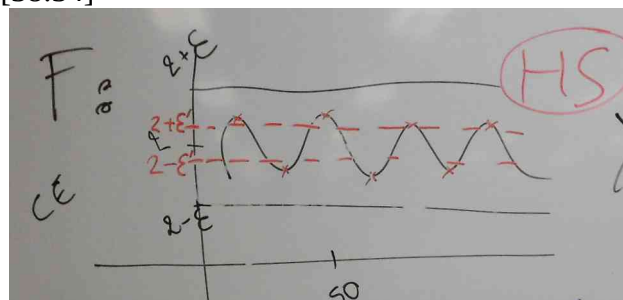
Vote : Vrai : 12 Faux: 5 Autre : 9

- 1 [>Le professeur]: [34:17] Fabio? (Qui s'est mis dans autre)
- 2 [>Fabio]: Moi je pense que c'est faux mais je ne trouve pas de contre-exemple. (beaucoup de Autre: moi aussi)
- 3
- 4 [>Le professeur]: [34:18] Alors tu as l'intuition que c'est faux, Fabio, c'est ça? [34:22] C'est un Faux sans contre-exemple. Qui est dans Faux sans contre-exemple? [34:28] Qui est dans la même position que Fabio? [34:32] d'autres Faux sans contre-exemple ? [34:38] Cinq. [34:42] OK. Parmi les Autre. Qui est dans Autre et veut expliquer pourquoi il est dans Autre? [34:52] Oui?
- 5
- 6
- 7
- 8 [>Valentin]: Je suis dans Autre et je penche plutôt vers Faux.
- 9 [>Le professeur]: [34:57] Valentin tu es plutôt vers Faux, pourquoi?
- 10 [>Valentin]: J'ai un contre-exemple, mais je suis pas sur il est ????
- 11 [>Le professeur]: [34:59] Tu nous le montres? [35:04] Vas-y!
- 12 [>Valentin]: C'est si on définit la fonction en fonction de x et epsilon.
- 13 [>Le professeur]: [35:12] Ah oui tout à l'heure on s'est interdit ça. [35:17]
- 14 [>Valentin]: Ah ben non alors.

15 [>Le professeur]: Parce qu'une fonction, il y a des x dedans, il n'y a pas des epsilon, ou alors epsilon
 16 tu lui donnes une valeur.
 17 [>Valentin]:[35:22] Ben oui mais elle change en fonction de...
 18 [>Le professeur]:[35:27] Ah oui là, tu vas changer la fonction en fonction du epsilon. Non, non c'est
 19 une fonction "normale", ce n'est pas une fonction avec plusieurs variables, une seule! [35:37]
 20 D'accord. Plutôt Faux mais voilà. Ensuite.[35:46] Il y en a cinq qui sont dans Faux. On va écouter
 21 les Faux.[35:51] Erika? Erika, tu nous montres ton Faux?[36:01]
 22 [>Erika.]:[36:08] Je peux faire un dessin?[36:13]
 23 [>Le professeur]: Oui.[36:18] Evann, reste dans le coup s'il te plaît, dans le coup des maths, s'il te
 24 plaît.[36:23].[36:43] D'accord.



26 [>Erika]: La fonction elle est entre deux plus epsilon et deux moins epsilon et elle n'est pas
 27 forcément égale à deux.
 28 [>Le professeur]:[36:48] D'accord, ça c'est un contre-exemple?
 29 [>Erika]: Oui.[36:53]
 30 [>Le professeur]: Marque contre-exemple à côté.[36:58]
 31 [>Le professeur]:[37:03] Vous êtes combien à avoir voté Faux pour ça?[37:08] Toi aussi? En fait
 32 tous ceux qui sont dans Faux sont dans Faux pour cette raison-là?[37:18] Hein? OK, j'avais cinq
 33 Faux, cinq qui le sont pour cette raison.[37:23] Baptiste, tu es dans Faux et tu veux rajouter quelque
 34 chose?[37:28]
 35 [>Baptiste]: Là ce qu'elle a fait Erika...
 36 [>Le professeur]: Attends un peu je vais faire un peu de silence[37:33]...
 37 [>Baptiste]:[37:38] Je m'étais trouvé un contre-exemple mais après ce que vous avez dit à Valentin,
 38 ça ne marchait pas. C'était epsilon fois sinus de x plus deux.[37:48] Le truc c'est qu'on ne peut pas
 39 exprimer avec epsilon.[37:54] Et cette fonction, elle marche dans ce cas-là, mais si on prend epsilon
 40 vraiment très, très petit, la fonction elle va pas changer en fait.[38:04] C'est sûrement juste mais ça
 41 me paraît super bizarre parce que là on trace la fonction...
 42 [>Le professeur]:[38:09] Tu es en train de dire que ce n'est pas un contre-exemple?
 43 [>Baptiste]: Ouais enfin...
 44 [>Le professeur]:[38:14] Mathieu?[38:19]
 45 [>Mathieu]: Je peux faire sur le dessin de Erika?
 46 [>Le professeur]: Oui tu changes de couleur.[38:24]
 47 [>Mickaël]: Tu es dans Vrai?
 48 [>Mathieu]: Oui.[38:29].[38:34]
 49



50 [>Le professeur]:[38:49] Alors tu expliques pourquoi parce qu'il y en a cinq qui croient en ce
51 contre-exemple.[38:54]

52 [>Mathieu]:[38:59] En fait epsilon, c'est pour... dans P1 on a pour tout epsilon, on a le droit de
53 changer epsilon. Et si on trouve un epsilon pour lequel la fonction en certains x est inférieure à deux
54 moins epsilon ou supérieure à deux plus epsilon, la fonction ne correspond pas, enfin, ne vérifie pas
55 P1.[39:24] Donc, j'ai mis un epsilon tel que certains pics de la fonctions soit au-dessus de deux plus
56 epsilon.[39:29]

57 [>Le professeur]: Alors pour toi si ce n'est pas un contre-exemple, c'est quoi?[39:34]

58 [>Mathieu]: Ben c'est un hors-sujet parce que ça ne vérifie pas P1.

59 [>Le professeur]: D'accord.[39:39]

60 [>Louis]: Ben moi je ne suis pas d'accord avec ça.

61 [>Le professeur]: Vas-y Louis!

62 [>Louis]: Parce que là c'est quelque chose d'impossible parce qu'en ordonnée on a deux fois deux
63 plus epsilon, c'est pas possible.[39:53]

64 [>Mathieu]: Epsilon, Louis, epsilon, c'est pour tout réel, donc deux plus epsilon, on peut avoir
65 n'importe quelle ordonnée en fait.

66 [>Louis]:[40:03] Quand tu as une variable, quand c'est écrit deux fois la lettre, à l'intérieur, il y a la
67 même chose à un instant présent. Si on choisit deux plus epsilon égal dix, enfin, epsilon égal dix, on
68 ne peut pas écrire au même instant epsilon égal et epsilon égal vingt.

69 [>Mathieu]:[40:23] C'est pour tout réel.[40:28] Donc, epsilon peut être égal à un ou epsilon égal
70 0,000001.

71 [>Louis]:[40:33] Mais quand Erika elle a écrit deux plus epsilon, elle l'a écrit sur tout R.

72 [>Mathieu]:[40:43] Oui mais il faut que ça marche pour tout epsilon.

73 [>Louis]:[40:48] Oui je suis d'accord.

74 [>Mathieu]: Ben pour cet epsilon ça ne marche pas.

75 [>Louis]: Ben si parce que du coup tu as fait un zoom.[40:58] Là, en fait, tu as modifié le... le
76 graphique, en fait.[41:03]

77 [>Mathieu]:[41:04] Oui mais j'ai le droit de modifier epsilon, rien ne m'oblige à avoir un epsilon
78 fixe.

79 [>Baptiste]:[41:05] Ce que tu dis Louis c'est que la fonction si on modifie comme on dit avec le
80 zoom, ça veut dire que la fonction elle est écrite en fonction d'epsilon.

81 [>Louis]:[41:12] Ouais. (Plusieurs élèves: c'est interdit, pas possible).[41:19] Oui!!! (Rires dans la
82 classe).[41:24]

83 [>Le professeur]: Vous vous fabriquez des fonctions qui ne sont pas les fonctions que l'on regarde.

84 [>Louis]: Moi, je suis d'accord avec Baptiste mais je ne suis pas d'accord avec Mathieu.

85 [>Le professeur]:[41:29] Thomas?[41:34]

86 [>Thomas]: Tu peux rajouter un prime à côté du epsilon comme ça c'est différent.[41:39]

87 [>Le professeur]: Louis?

88 [>Louis]: Et bien dans ce cas-là vu que la fonction elle est définie en fonction d'epsilon, celle qui est
89 écrite la-bas, ça n'a aucun rapport avec ce qui est écrit en rouge.[41:54] Vu que ce n'est pas en
90 rapport avec la fonction qui est définie.

91 [>Mathieu]:[41:59] La fonction n'est pas définie avec epsilon.[42:04]

92 [>Louis]: Non mais ce que je veux dire c'est que quand on écrit deux plus epsilon sur un graphique.
93 Si on écrit deux plus epsilon, ça veut dire qu'on prend n'importe quel epsilon. Mais ce n'est pas une
94 constante epsilon, sur le graphique.

95 [>Le professeur]:[42:19] Ah oui![42:24]

96 [>Mathieu]: Ça c'est une valeur d'epsilon et ça c'est une autre valeur d'epsilon.[42:29]

97 [>Mathieu]: Ah tu veux que je la renomme alors, c'est tout?

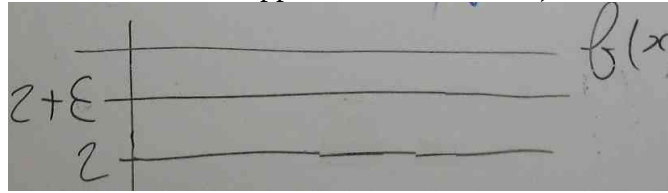
98 [>Le professeur]: Non, ce qu'il dit, ce que je crois comprendre... [42:44] là il écrit, du moins c'est
99 Erika qui a écrit, deux plus epsilon, et quand deux plus epsilon change par exemple devient petit, la

100 fonction qui est au milieu elle se rapetisse en même temps.
101 [>Louis]:[43:24] Ouais.
102 [>Le professeur]: Oui sauf que ça c'est bien comme ce que tu as dit tout à l'heure ça veut dire que la
103 fonction est aussi une fonction d'épsilon. Parce que si epsilon bouge et la fonction bouge avec, cela
104 veut dire que la fonction est définie par epsilon.[43:44] Il me semble que l'on s'est interdit ça.
105 [43:49] Donc, il a bien raison Mathieu de dire: OK j'ai une fonction ici, on prend epsilon là, ça
106 marche mais si on prend un autre epsilon et bien la fonction elle ne bouge pas puisque ce n'est pas
107 epsilon qui fait bouger la fonction, c'est que x . x fait bien bouger la fonction puisque c'est une
108 fonction sinusoïde. Mais quand epsilon bouge, la fonction ne bouge pas.[44:14] OK.[44:19] On en
109 est où là?

111 **PARTIE II : La démonstration**

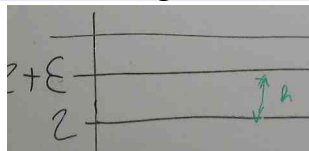
112
113 [>Le professeur]: On en avait... Il n'y a personne qui a expliqué pourquoi il pensait que c'était vrai.
114 [44:29] On a entendu toutes les versions sauf le Vrai.[44:34] Mathieu est venu ici pour dire
115 pourquoi ce contre-exemple est un hors-sujet, autrement dit que ce n'était pas un contre-exemple,
116 mais on a pas entendu pourquoi c'est vrai.[44:49] Alors on a Maxime qui veut prendre la parole.
117 [44:54] Tu as une démonstration ou pas?
118 [>Maxime]:[44:59] Je ne sais pas, je me tâte en fait.[45:04]
119 [>Le professeur]: S'il vous plaît!
120 [>Maxime]: En début d'année on avait dit...
121 [>Le professeur]: Attends une seconde.(trop de discussions)
122 [>Maxime]: Désolé.[45:09]
123 [>Le professeur]: Une seconde car sinon...Voilà (le silence revient) Maxime va expliquer pourquoi
124 il pense que c'est vrai. C'est la seule version qu'on ai pas entendu jusqu'à présent: le Vrai.[45:24]
125 Vas-y!
126 [>Maxime]: En début d'année, on avait dit que deux virgule quatre vingt dix neuf barre (des neuf
127 indéfiniment) et trois ce n'était pas égal et qu'on pouvait faire la moyenne entre les deux.[45:34] On
128 a tous compris que c'était vrai. (certain élèves: ben non!) Ben si![45:39] Que tu pouvais toujours
129 faire la moyenne entre deux virgule quatre-vingt dix-neuf barre et trois.[45:43] Tu pouvais toujours
130 faire la moyenne des deux.[45:48]
131 [>Baptiste]: Ça c'est faux, deux virgule quatre-vingt dix-neuf barre, c'est l'écriture impropre de trois.
132 [45:53]
133 [>Le professeur]: Tu dis Baptiste, que deux virgule quatre-vingt dix-neuf barre c'est l'écriture
134 impropre de trois, ça veut dire quoi ça?[46:03]
135 [>Baptiste]: Ben entre-autre deux quatre-vingt dix-neuf barre c'est trois, c'est une autre écriture.
136 [46:08]
137 [>Maxime]: Ben non!
138 [>Baptiste]: Mais si je l'avais montré, je peux le refaire.[46:20]
139 [>Louis]: (Au professeur) C'est différent ou quoi? C'est pour savoir.
140 [>Le professeur]: En début d'année, j'ai dit que deux virgule neuf avec des neuf jusqu'à l'infini
141 c'était la même chose que trois.
142 [>Maxime]:[46:28] Non vous avez dit que l'on peut faire la moyenne des deux nombres.[46:33]
143 [>Le professeur]: Non, non, ce n'est pas ce que j'ai dit. J'ai dit: imaginons que ce soit différent,
144 imaginons, ça ne veut pas dire que ça l'est. Alors si c'est différent on peut faire la moyenne (et on
145 obtient un troisième nombre entre les deux).[46:53]
146 [>Maxime]: Mais c'est différent![46:48]
147 [>Le professeur]:[47:08] Comme la première version du Vrai elle se retire, deuxième version du
148 Vrai.[47:13]
149 [>Quentin]: On peut regarder si $f(x)$ est différent de deux.[47:18] Si $f(x)$ est différent de deux il y

151 aura toujours une valeur d'epsilon qui sera comprise entre $f(x)$ et deux.[47:28] Puisque $f(x)$ est
152 différent de deux, il y aura toujours une valeur entre les deux.[47:33]
153 [>Le professeur]: Tu peux nous faire un dessin de ça, ça serait peut-être plus clair. (Quentin vient au
154 tableau).[47:38] (soudainement Maxime frappe fortement la table).[48:19]



156 [>Le professeur]:[48:34] Qu'est ce qui se passe? C'est toi qui vient de faire ça?[48:39]
157 [>Maxime]:[48:36] Il n'y a personne qui l'écoute jamais, ça m'énerve. (les élèves: houuuuu). Non
158 mais sérieux, regardez-vous, vous êtes tous en train de parler tout le temps. Franchement il fait un
159 truc et vous l'écoutez même pas.[48:46]
160 [>Marine]:[48:51] Faut se détendre!
161 [>Le professeur]: Se détendre, vous pouvez sortir, vous allez vous détendre, moi je trouve qu'il a
162 raison.[48:56] Franchement il y en a qui ne réalisent pas, que quand eux parlent on fait, je fais le
163 silence pour eux. Et il sont bien content qu'il y ait le silence.[49:11] Mais quand c'est quelqu'un
164 d'autre alors là on peut parler, on peut lui marcher sur les pieds, sur la tête s'il le faut, il n'y a pas de
165 problème. Et on est étonné que quelqu'un se rebelle contre ça. Ben non moi je trouve que c'est
166 normal.[49:26] Vas-y Quentin, donc tu expliques pourquoi c'est vrai.[49:36]
167 [>Quentin]: Pour montrer que c'est vrai je vais montrer que $f(x)$ ne peut pas être différent de deux.
168 [49:41] Si ce n'est pas différent de deux, ça veut dire que c'est égal à deux, on est d'accord. Donc, si
169 $f(x)$ est différent de deux, il y a forcément une valeur comprise entre $f(x)$ et deux.[49:51] Donc, il y
170 a forcément une valeur de deux plus epsilon comprise entre $f(x)$ et deux. Et donc P1 ne sera plus
171 vérifié.[50:01] Donc, l'exemple sera faux, $f(x)$ différent de deux.
172 [>Le professeur]: Aya?
173 [>Aya]: Tu peux ré-expliquer parce que je n'ai pas très bien compris en fait.[50:11]
174 [>Elsa]: Quentin, tu es dans Vrai?!!
175 [>Quentin]: Oui je suis dans Vrai.[50:16]
176 [>Elsa]: Il y a un soucis là!
177 [>Nathan]: Tu dis que c'est faux en fait?[50:21] Tu es dans Vrai mais tu dis que c'est faux.
178 [>Elsa]: Oui j'ai l'impression que c'est un argument du Faux.[50:26]
179 [>Margot]:[50:27] Oui en fait ce qu'il dit c'est que le Faux est faux.
180 [>Le professeur]:[50:28] On va le ré-écouter parce que lui il prétend que ce qu'il dit est un argument
181 du Vrai.[50:33] Vas-y Quentin, écoutez bien.
182 [>Quentin]: Je dis que c'est vrai pour $f(x) = 2$ en montrant que c'est faux pour $f(x)$ différent de 2.
183 [50:42] Je montre que $f(x)$ ne peut pas être différent de deux. (grand silence).[50:47] Oui Nathan?
184 [>Nathan]: Donc, tu montres que l'exemple que Erika a fait au tableau est faux?
185 [>Quentin]:[50:50] Aussi oui par la même occasion.[50:55] (Rires dans la classe). Vu que je suis
186 dans Vrai, c'est faux!
187 [>Sébastien]: C'est un raisonnement par l'absurde.[51:00] On en fait tout le temps.
188 [>Baptiste]: Oui ça ne change pas qu'il ait raison.[51:05]
189 [>Le professeur]: Toi, Sébastien, tu trouves qu'il a raison, Mathieu, quand il dit ça?[51:12] Euh
190 Quentin pardon.[51:16]
191 [>Sébastien]: Oui il fait un raisonnement par l'absurde.
192 [>Le professeur]: Tu parles plus fort s'il te plaît.[51:22] Juste pour que Déborah qui est là-bas puisse
193 t'entendre. Vous êtes à la diagonale.[51:26] Allez vas-y!
194 [>Sébastien]: C'est juste un raisonnement par l'absurde donc on en a déjà fait, on a montré avec ces
195 raisonnements que ça marchait.[51:36] Donc, vu que ça marche le raisonnement, donc c'est vrai.

196 [>Le professeur]:[51:38] Toi tu as voté Vrai?[51:43]
 197 [>Sébastien]: Oui.
 198 [>Le professeur]: Pour cette raison-là? La même?[51:48]
 199 [>Sébastien]: Oui.
 200 [>Le professeur]: Oui Aya?[51:50]
 201 [>Aya]: Est-ce tu pourrais redire ce que tu as dit au tout début?[51:55]
 202 [>Le professeur]: Vas-y!
 203 [>Quentin]: Pour montrer que $f(x)$ c'est forcément égal à deux, je démontre qu'il ne peut pas être
 204 différent de deux.[52:05] Et si $f(x)$ est différent de deux il y aura toujours une valeur entre $f(x)$ et
 205 deux, tu es d'accord?
 206 [>Aya]:[52:10] Ouais.
 207 [>Quentin]: Donc, si deux et epsilon est comprise... euh deux plus epsilon pourrait être compris
 208 entre deux et $f(x)$ donc P1 ne sera plus vérifiée. Et donc il n'y aura plus de... la conjecture serait
 209 fausse.[52:26]
 210 [>Margot]: Alors pourquoi tu votes Vrai alors?
 211 [>Quentin]: Si $f(x)$ différent de deux.[52:31]
 212 [>Margot]: OK.[52:31]
 213 [>Le professeur]:[52:33] Louis?
 214 [>Louis]: Est-ce que je pourrais aller développer son...
 215 [>Le professeur]:[52:38] Oui, dans une autre couleur, prend le vert par exemple.[52:43]
 216 [>Louis]:[52:48] En fait ce que...
 217 [>Le professeur]: Attends Louis, une seconde.[52:53] Je vous rappelle une chose, c'est que depuis le
 218 début qu'on discute de cette conjecture-là, j'ai entendu personne changer d'avis, pas à un seul
 219 moment. Donc, vous avez le droit de ne pas changer d'avis mais par contre il faut dire quand vous
 220 changez d'avis sinon on ne sait plus où on en est.[53:08] OK. Vas-y.
 221 [>Louis]: Si on prend la première fonction qu'on avait $f(x) = 2$, donc celle-là. C'est ce qu'on essaie
 222 de dire là. En fait je vais partir comme Quentin: si la fonction $f(x)$ est différente de deux, ça veut
 223 dire qu'à un moment elle fait au moins entre guillemet "un soubresaut" comme ça, elle est au moins



224 pour une valeur de x différente de deux.[53:46] Donc, par exemple, là.
 225 [>Le professeur]: Fais-là plus haut sinon on verra rien (Il l'avait dessiné seulement un demi
 226 centimètre au-dessus de deux.)
 227 [>Louis]: On peut la faire petite ou on peut la faire bien plus grande. Ici elle est en dessous de deux
 228 plus epsilon.[53:56] Et si on prend pour valeur ici h , et bien on pourra toujours trouver une valeur
 229 d'epsilon qui sera plus petit que h qui sera en fait le plus, on va dire le plus haut pic de la fonction
 230 qui se rapprocherait de deux en fait.
 231 [>Le professeur]:[54:16] Thomas?[54:21]
 232 [>Thomas]: Je veux juste dire que je suis d'accord avec ce que Louis et Quentin ont fait et je passe
 233 de Autre à Vrai.
 234 [>Le professeur]:[54:22] Tu passes de Autre à Vrai pour cette raison-là.[54:27]
 235 [>Baptiste]: Moi je passe de Faux à Vrai.
 236 [>Le professeur]: De Faux à Vrai.[54:32] OK.[54:37] Donc, j'en ai trois qui passent de Faux à Vrai
 237 ou Autre à Vrai.[54:47] Il y en a combien qui passent de Faux à Vrai?[54:52]
 238 [>Margot]: Refaites le compte.
 239 [>Le professeur]: Oui je vais faire un vote ce sera plus simple.[54:57] Après ce débat qui pense que
 240 cette conjecture C1.7 est vraie? OK. Beaucoup. Qui pense qu'elle est fausse? Qui se met dans
 241 Autre?[55:17] Quatre, d'accord.[55:22] Bon on va arrêter là avec cette conjecture-là.[55:27]