

Travail mathématique autour de la fonction de densité de probabilités.

Thème 1 – TD2.2

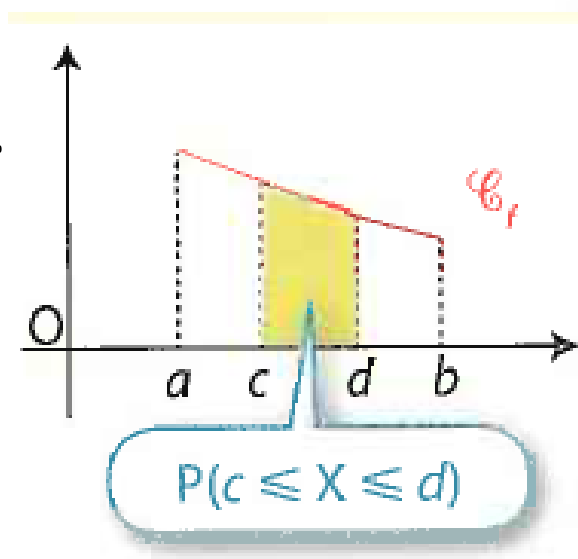
Charlotte Derouet et Alain Kuzniak

LDAR – Université Paris Diderot

- Objectif : Travailler la circulation entre les différentes composantes et entre les différentes genèses de l'ETM.
- Objet mathématique : la fonction de densité de probabilité.
- Niveau : Terminale S (France)

Fonction de densité

- Associée à une variable aléatoire continue X
- Une fonction de densité de probabilité f vérifie des contraintes :
 - f est définie et continue (en TS) sur I ;
 - f est positive sur I ;
 - L'aire sous la courbe de f vaut 1.



Extrait d'une séance

- Dans le cadre de la thèse de C. Derouet (ingénierie de plusieurs semaines)
- Séquence : des problèmes de probabilités continues comme introduction au calcul intégral dans un but de créer des liens entre calcul intégral et lois à densité
- Problème 2 : Séances 3 et 4 de la séquence

Prérequis

- Révisions sur les histogrammes
 - Rencontre de la loi uniforme
 - Rencontre de la loi de Xénakis (différence de 2 lois uniformes) – fonction de densité affine...
- Séance 1
- Séance 2
- Le calcul intégral n'a pas encore été abordé

Problème 2

Le volcan Aso, situé sur l'île de Kyushu au Japon, est l'un des plus actifs au monde. On possède les statistiques de ses éruptions, régulièrement tenues depuis le XIII^e siècle. Nous avons, dans le document tableur, les années d'éruptions jusqu'au XIX^e siècle (à partir du XX^e siècle, les données, d'une autre nature, ne sont pas compatibles(*)).

Années des 73 éruptions du volcan Aso du XIII^e au XIX^e siècle

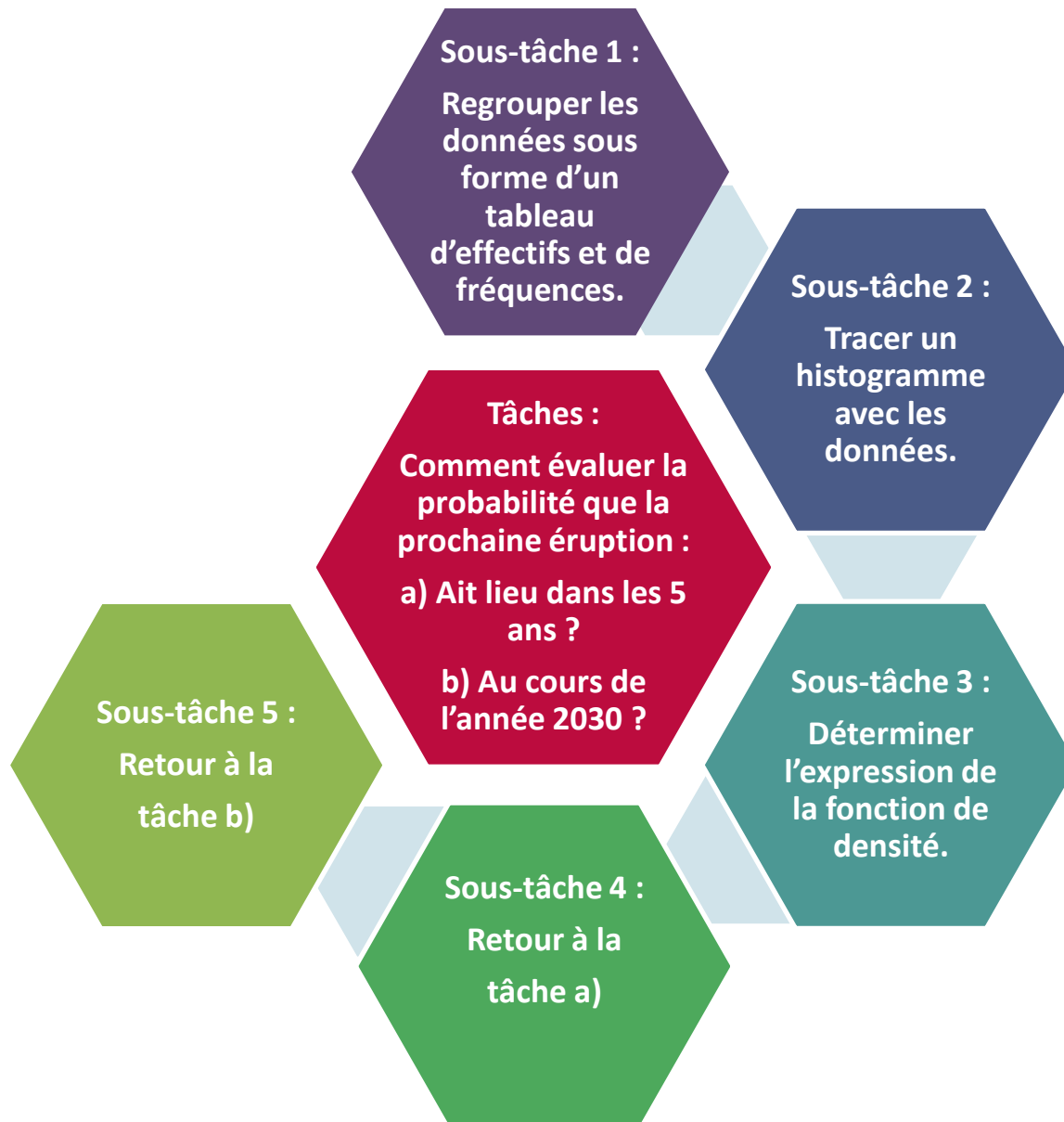
Donnée n°	Année	Temps d'attente	Donnée n°	Année	Temps d'attente
1	1229		34	1562	4
2	1239	10	35	1563	1
3	1240	1	36	1564	1
4	1265	25	37	1576	12
5	1269	4	38	1582	6
6	1270	1	39	1583	1
7	1272	2	40	1584	1
8	1273	1	41	1587	3
9	1274	1	42	1598	11
10	1281	7			
11	1286	5			
12	1305	19			
13	1324	19			
...			

Le volcan Aso est actuellement en éruption.

Comment évaluer la probabilité que la prochaine éruption:

- ait lieu dans les 5 ans ?
- Au cours de l'année 2030 ?

Organigramme du déroulement



Zoom sur une sous-tâche

Sous-tâche 3 :
Déterminer
l'expression de la
fonction de densité.

Phase de recherche
individuelle de la sous-
tâche 3

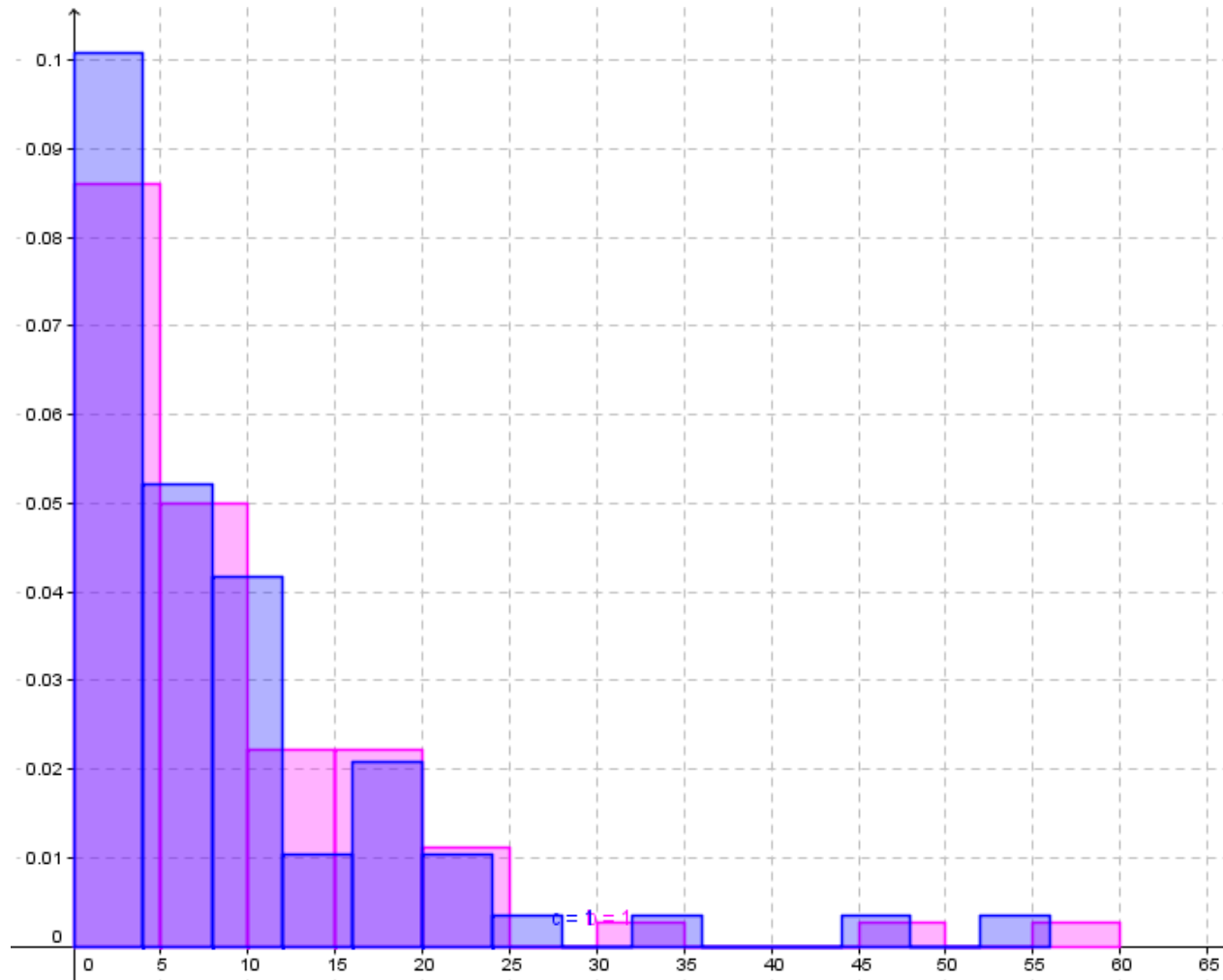
Rappel du vocabulaire

Détermination de l'ensemble de définition de la
fonction de densité

Réfutation des fonctions de la famille de la fonction
inverse

Ajustement de la fonction exponentielle

En amont de la sous-tâche 3



La dévolution de la sous-tâche

Marie : Alors, donc le problème c'est quoi finalement là ? On en est où là tous ?
Je vous laisse chacun 5 minutes.

Elève A42 : Faut trouver l'équation...

Marie : C'est quoi l'objectif ? Trouver...

Elève A42 : L'équation.

Elève A52 : Une courbe de tendance.

Plusieurs élèves : Une courbe de tendance.

Marie : L'équation, l'expression de... de votre courbe de tendance.

[...]

On cherche une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ qui approche « au mieux » l'histog.

Analyse d'un moment particulier de la sous-tâche 3

**Réfutation des fonctions de la famille
de la fonction inverse**

Travail demandé

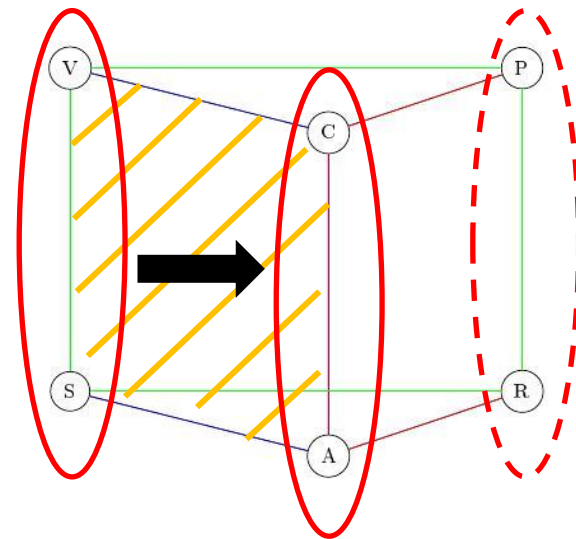
A partir de la ligne 59

- **Q1** – Faire un découpage de la transcription en phases, liées à des transformations du travail mathématique et des changements de buts de l'activité.
- **Q2** – Identifier les différentes entrées et les interactions dans l'ETM (sémiotique, discursive, instrumentale) dans chacune de ces phases.
- **Q3** – Identifier les paradigmes de l'analyse en jeu suivant ces phases.
- **Q4** – Préciser le rôle respectif du professeur et des élèves dans chacune de ces phases.

Analyse – Phase 1

- Ligne 59 à ligne 82 – Premières adaptations de la courbe, avec la contrainte de courbe qui approche le mieux l'histog.

Sémiotique	Instrumentale	Discursive
Entrée sémiotique: Graphique ↕ $\frac{1}{x}$		Implicite (reconnaissance entre représentation graphique et expr. de la fonction)
Visualisation	Permet de déplacer la courbe	

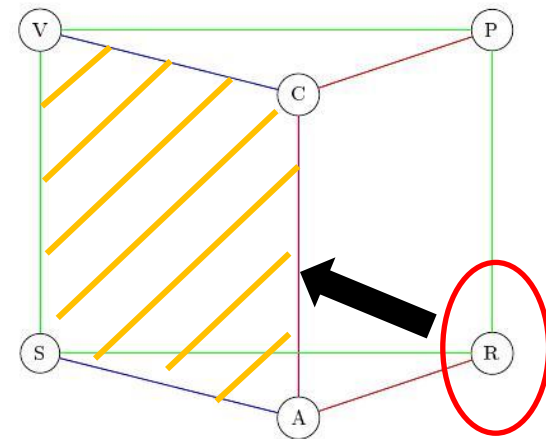


- Paradigme AG
- Prise en compte des propositions des élèves par l'enseignante

Analyse – Phase 2

- Ligne 82 à ligne 141 – Régulation avec la contrainte que la fonction doit être positive

Sémiotique	Instrumentale	Discursive
		Entrée discursive (référentiel théorique) qui relance le travail...
Visualisation graphique	Déplacement de la courbe	

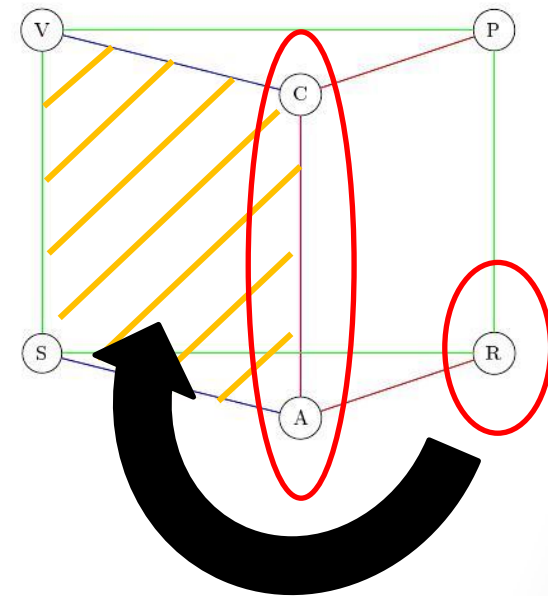


- Paradigme AG
- L'enseignante amène la contrainte de la positivité de la fonction.

Analyse – Phase 6

- Ligne 216 à ligne 267 – Phase d’ajustement avec les curseurs (GeoGebra), avec la contrainte que la fonction doit être proche de l’histogr.

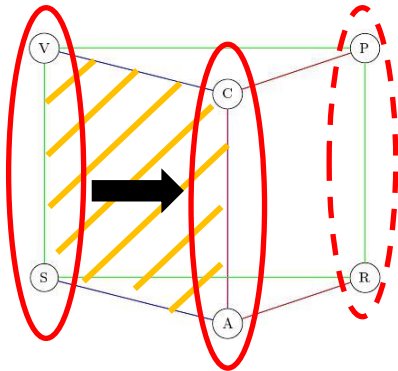
Sémiotique	Instrumentale	Discursive
		Entrée Référentiel théorique
Registre numérique Mis au service de l’instrumental	← Usage de la fonction « aire » de GeoGebra	



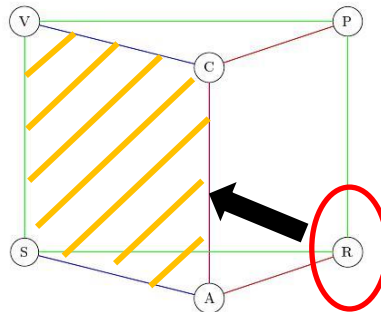
- Paradigme AG
- L’enseignante amène la nouvelle contrainte.

Conclusion

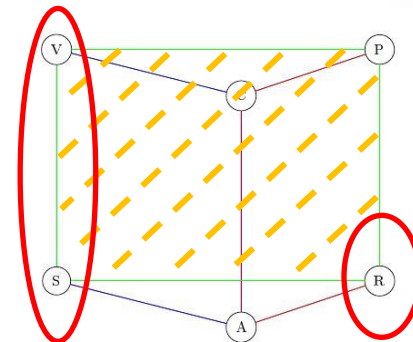
1



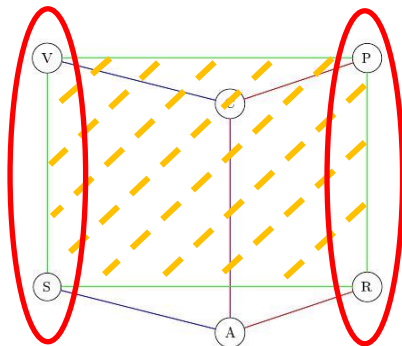
2



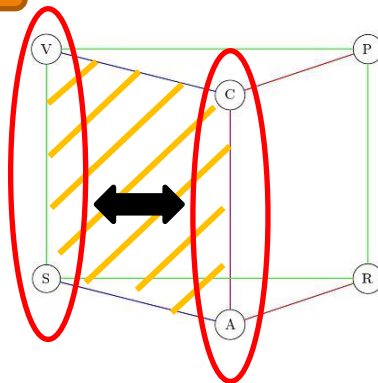
3



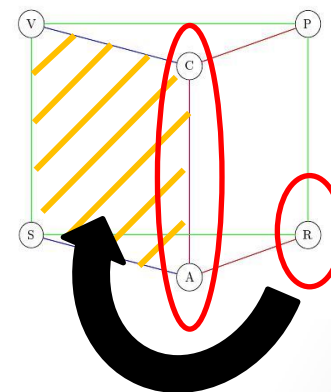
4



5



6



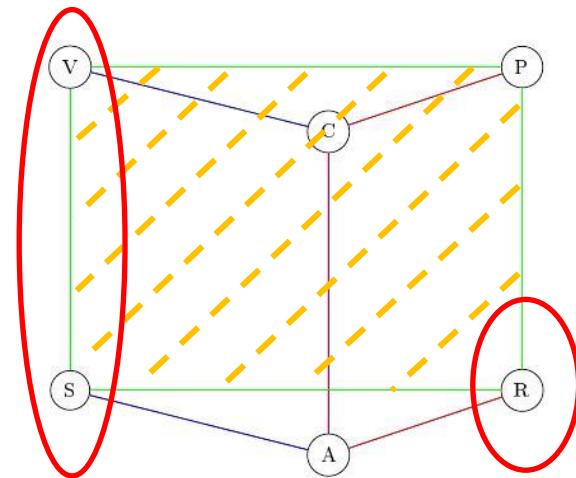
Evolution du travail mathématique au cours de la sous-tâche 3

Merci !

Analyse – Phase 3

- Ligne 141 à ligne 156 – Recherche de la forme canonique des transformées affines de la fonction inverse (travail algébrique)

Sémiotique	Instrumentale	Discursive
Registre algébrique		Référentiel théorique

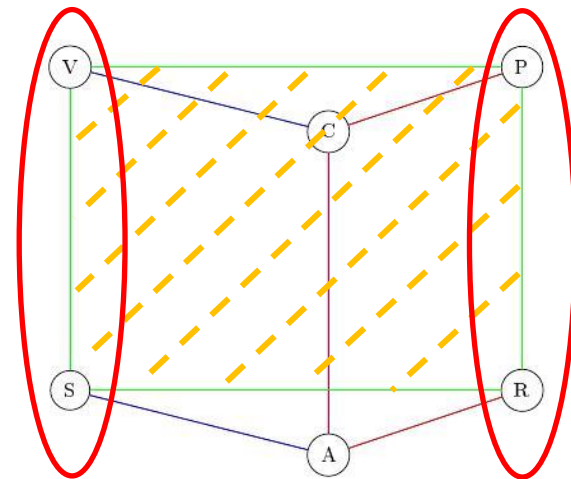


- Paradigme AC
- Le travail mathématique est à la charge de l'enseignante.

Analyse – Phase 4

- Ligne 157 à ligne 175 – Réflexion sur les limites pour simplifier la forme canonique de la fonction, avec la contrainte de la positivité de la fonction

Sémiotique	Instrumentale	Discursive
Registre algébrique		

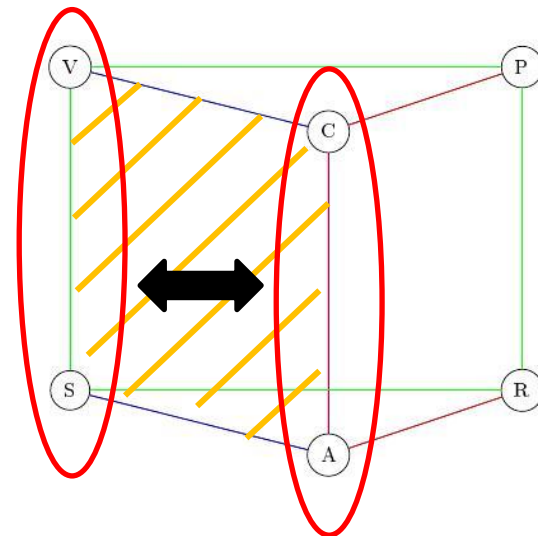


- Paradigme AC
- L'enseignante pilote le travail.
- Tâche non routinière

Analyse – Phase 5

- Ligne 175 à ligne 216 – Phase d’ajustement avec les curseurs (GeoGebra), avec la contrainte que la fonction doit être proche de l’histogr.

Sémiotique	Instrumentale	Discursive
Registre algébrique	Entrée instrumentale	
Visualisation graphique		



- Paradigme AG
- L’enseignante pilote le travail.
- Tâche non routinière